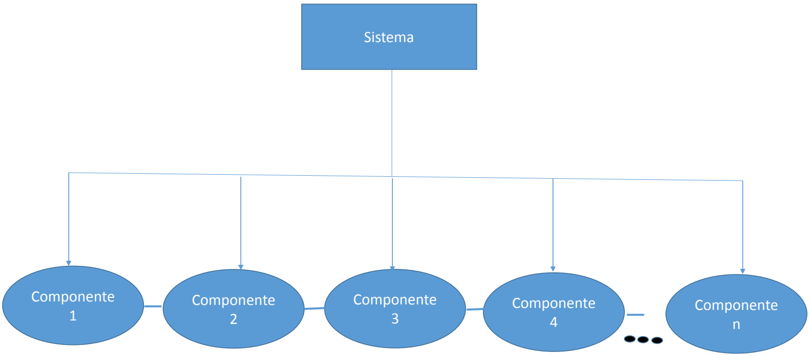
Introducción a Modelos de Recompensas en Sistemas semi-Markovianos No Homogéneos, Una aplicación a las Ciencias Actuariales

Dr. Alfredo Camacho Valle

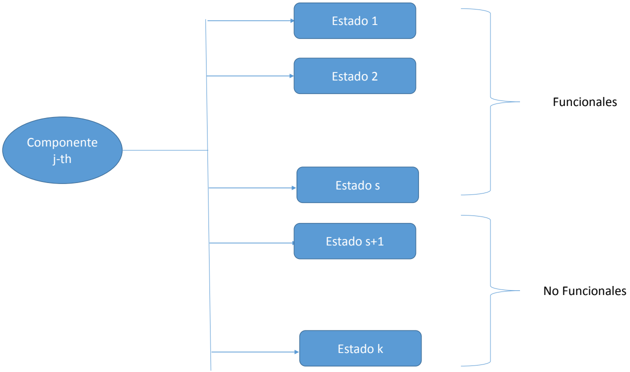
Universidad Autónoma de Chiapas, Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

8 de septiembre de 2016

Considere un Sistema compuesto por n componentes ($n \leq \infty$).



Cada uno de esos componentes se puede ubicar en una cierta cantidad de estados (k_i) finitos, de los cuales s_i pueden clasificarse como funcionales, es decir, el componente se encuentra operando y los restantes $k_i - s_i$ son estados no funcionales.



Suponga que para que el sistema opere es necesario que al menos $r \leq k$ de ellos esté funcionando, es decir el sistema operará sí y sólo si r o $r+1$.... o n de ellos se encuentran en estados funcionales, lo que se puede representar como:

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_{r+i}$$

Es decir, si suponemos un pequeño sistema de 10 componentes que funciona con al menos 6 de ellos operando, entonces, el sistema podrá funcionar de 386 formas distintas.

Supongamos al igual que la operatividad de cada uno de dichos componentes es independiente del resto, es decir, si definimos:

I El componente se encuentra operando.

II El componente no se encuentra operando.

$$Prob[X_1(I), X_2(I), ...X_j(I)] = \prod_{i=1}^{j} Prob[X_i(I)]$$

Consideremos además, el siguiente supuesto para cada uno de los componentes.
Sea el espacio de estados $I = \{1, 2, ...k\}$ Entonces:

$$\begin{aligned} Prob[X(t) = j | X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, ...X(t_s) = i_s] \\ = Prob[X(t) = j | X(t_s) = i_s] \end{aligned}$$

Es decir, el pasado del proceso no es significativo para el cálculo de la probabilidad tan sólo lo es el estado actual.

Bajo el contexto de análisis de confiabilidad, una de las características más importantes a analizar del fenómeno representa su mortandad, mismo que la mayoría de las veces se expresa como un estado absorbente, donde decimos que un estado j es absorbente si:

$$Prob[X(t+w) = j | x(t) = j] = 1 \text{ para todo } w \geq 0$$

,

Función de riesgo

Introduzcamos ahora el concepto de función de riesgo al momento t, $h(t)$, definida como:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

donde:
$f(t)$: función de densidad.
$1 - F(t)$: función de sobrevivencia.

En el caso que la función de densidad este definida como

$$f(t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

Se puede demostrar fácilmente que $1 - F(t) = e^{-\lambda t}$
y además, que

$$h(t) = \lambda$$

es decir, la tasa de riesgo es constante en el tiempo, lo que en nuestro fenómeno de estudio significa que el tiempo que ha permanecido en un estado dado, no es significativo en la probabilidad de migración.

Este supuesto podría aplicar en varias fenómenos, tal como el robo de autos; no obstante, cuando por ejemplo se estudia ciclos de vida de seres vivos no es posible suponer una tasa de riesgo constante. Es decir, no podemos suponer un proceso Markoviano.
En el caso discreto, donde se supone que la función de distribución es geométrica se llega a un resultado equivalente.
Por lo tanto, se debe relajar este supuesto Markoviano, lo que nos conlleva a los procesos Semi-Markovianos.

Procesos de Recompensa

Suponga un componente dado con k estados finitos, donde para cada uno de dichos estados se le asocia un costo ó un pago, mismo que se va acumulando en el tiempo.
Es decir, suponga que al momento inicial t_o se tiene un monto inicial m_o entonces podemos definir la variable aleatoria $M(t)$, misma que resulta del monto acumulado hasta el momento t, el cual tiene como espacio los números reales.
De esta forma, el proceso $\{M(t)\}_{t=t_o}$ se le conoce como un proceso de recompensa.

Este tipo de Modelos pueden ser muy variados dependiendo de la característica del fenómeno, tales como:

- Homogeneidad.
- Tiempo: Continuo ó Discreto.
- Tipo de Recompensa: Fija, variable homogénea ó variable no homogénea.
- Tasa de Recompensa: Tiempo discreto o continuo.
- Dependencia de la recompensa: Dependencia de la siguiente transición ó no dependiente.
- Tasa de interés: determinística o estocástica.

Hasta el momento, se han encontrado más de 600 tipos de procesos de recompensa.

De esta forma, modelar el proceso estocástico para un sistema de compensas resulta muy complejo, dado que las propiedades matemáticas cambian considerablemente dependiendo las características del fenómeno específico.
No obstante, un común denominado es que la ecuación de probabilidad de migración resultante, tanto por la filosofía forward como por la backward es expresada a través de una ecuación diferencial.
Una forma de las formas de darle solución al proceso en estudio, es a través de Simulación Montecarlo; que consiste en simular los procesos un número grande veces, para así analizar los posibles escenarios.

Caso de Estudio

Suponga una empresa con 100 empleados que contrata una cobertura de protección para los beneficios adicionales por 20 años, con los siguientes beneficios a cubrir:

1. Seguro de Viudez: 24 meses de salario.
2. Seguro de Gastos Funerarios: 2 meses de salario.
3. Seguro de Invalidez Total y Permanente: 60 meses de salario.
4. Seguro de Desempleo: 3 meses de salario y 12 días por cada año laborado.

De esta manera los riesgos a cubrir son:

1. Mortalidad: Experiencia mexicana CNSF 2001
2. Invalidez total y permanente: Experiencia IMSS 1997
3. Rotación de Empleados: Experiencia STPS 1995 - 2005.

Para la edad, sexo y salario de la persona se obtuvieron por generación de números aleatorios de distribuciones uniformes con los siguientes intervalos:

- Edad: $[25, 50]$
- Sexo: $[0, 1]$.
- Salario: $[5000, 60000]$.

Otro riego a considerar son las tasas de interés, misma que se en su forma más general, supone existe una función $\delta(t)$, de esta manera, el interés acumulado en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ estará dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t)} dt$$

Para este caso particular se supuso una tasa de interés constante de 4,5 por ciento.

De esta forma se calculó la prima de riesgo PR para cada uno de los empleados, misma que se extre a través de la siguiente ecuación:

$$PR \sum_{i=n_o}^{n} \int_{i}^{i+1} f(x_i, x_2, ...x_s) \partial_i, ...\partial_s \int_{i}^{i+1} e^{-\delta(t)} dt$$

$$= SA \sum_{i=0}^{s} \int_{i}^{i+1} e^{-\delta(t)} dt$$

Para este caso particular, las integrales de probabilidades de ocurrencia del fenómeno se aproximaron por discretización del fenómeno de estudio.

Definamos ahora un proceso semi-Markoviano discreto no homogéneo, en el cual la matriz P será la probabilidad de migración a un paso de un estado a otro, donde la invalidez, mortalidad y desempleo son estados absorbentes.
En total se definieron 240 matrices P.
La función de supervivencia se calculó a través de técnicas estadísticas.

Con los datos se plantearon 10 millones de escenario posibles al final de los 20 años, donde la variable aleatoria en estudio fue $M(240)$, que lo definiremos como el monto que le queda a la aseguradora al final de los 20 años.
La parte de interés en el problema serán:

- $Prob[M(240) < 0]$
- $E[M(240)|M(240) < 0]$
- $Var[M(240)|M(240) < 0]$
- $Sesgo[M(240)|M(240) < 0]$
- $Kurtosis[M(240)|M(240) < 0]$
- $X_{0,95|M(240)<0}$

Los reultados obtenidos fueron:

- $Prob[M(240) < 0] \approx 0{,}0318$
- $E[M(240)|M(240) < 0)] \approx -12,137,219$
- $Desv.Est.[M(240)|M(240) < 0] \approx 3,268,516$
- $Sesgo[M(240)|M(240) < 0)] \approx 2{,}86$
- $Kurtosis[M(240)|M(240) < 0] \approx 8{,}372$
- $X_{0,95|M(240)<0} = 19,215,683$

G R A C I A S