Seminario FCFM, UNACH

Variedades de Prym Clásicas

María del Rosario Soler Zapata
msolerza@unach.mx

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; agosto 9 de 2018

¿Qué entiendo por variedad?

¿Qué entiendo por variedad?

Variedad topológica

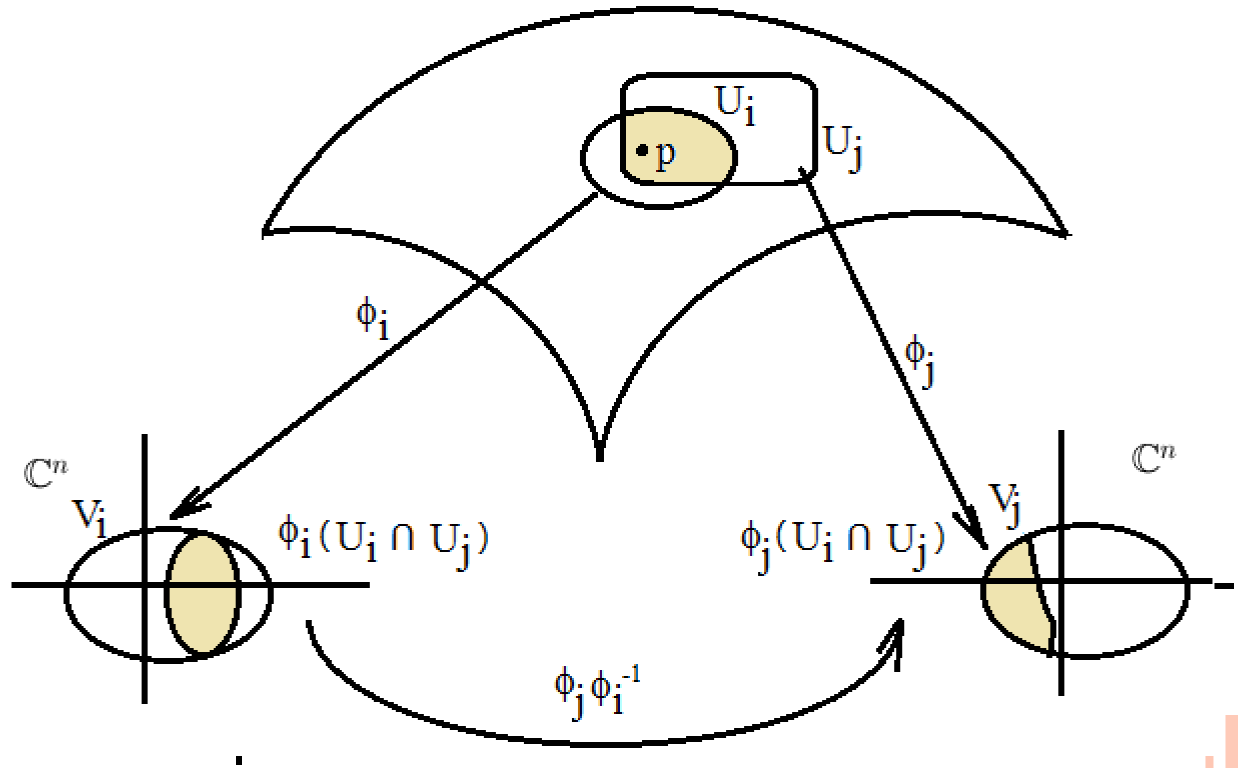
Variedad diferenciable

Variedad compleja

Variedad algebraica

Variedad proyectiva

¿Variedad abeliana?



Variedad abeliana

- Variedades algebraicas proyectivas que a su vez tienen estructura de grupo algebraico, es decir, su ley de grupo puede definirse por funciones polinomiales.

- Toro Complejo que admite un haz lineal definido positivo.

- Toro Complejo que admite una polarización $H=c_1(L)$.

- Variedades complejas de la forma $X=V/\Lambda$

Variedades Complejas de la forma $X = V/\Lambda$

V es un espacio vectorial complejo de dimensión g

Λ es una latiz en V, es decir, un subgrupo discreto de rango $2g$ en V y por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z}^{2g}$.

X es de dimensión g y es abeliano

Sea $E = Im(H)$, hay una base $\lambda_1, \ldots \lambda_g, \mu_1, \ldots, \mu_g$ de Λ, respecto a la cual, E esta dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

Una polarización una forma hermitiana $H : V \times V \to \mathbb{C}$ positiva definida tal que

$$Im\ H(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$$

$\Delta = diag(d_1, \ldots d_g)$, $d_i \geq 0$ y $d_i \mid d_{i+1}$

El vector $\boldsymbol{t} = (d_1, \ldots, d_g)$ se denomina el tipo de la polarización.

Variedades de Prym Tyurin

Teorema de Torelli

$$(X,\Theta_X) \quad \mathcal{A}_g$$

$$C \longmapsto (J(C),\Theta)$$

Una variedad abeliana principalmente polarizada (X,Θ_X) es llamada variedad de Prym-Ty $i_X^*\Theta \equiv e\Theta_X$ urva suave proyectiva C con Jacobiana $(J(C),\Theta)$, tal que X es una subvariedad abeliana de $J(C)$ con $i_X^*\Theta \equiv e\Theta$ $i_X : X \hookrightarrow J(C)$ 1, donde $i_X : X \hookrightarrow J(C)$ es la inclusion ca llama exponente de la variedad X.

Criterio de Welters

Toda vapp de dimensión g es una variedad de Prym-Tyurin de exponente

$$e = 3^{(g-1)}(g-1)!$$

Variedad abeliana A de dimensión g	2	3
A es Prym-Tyurin de exponente (Welters)	3	18
A es Prym-Tyurin de exponente (Torelli)	1	1

$$\dim \mathcal{M}_g = \dim \mathcal{A}_g$$

Considere el conjunto

$$\mathcal{R}_g = \{\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \mid \pi \text{ es } \text{étale de grado } 2\}$$

Hay una aplicación natural

$$\mathcal{R}_{g+1} \longrightarrow \mathcal{A}_g$$

$$f \longrightarrow P(f)$$

Variedad abeliana A de dimensión g	4	5
A es Prym-Tyurin de exponente (Welters)	162	1944
A es Prym-Tyurin de exponente $dim\,\mathcal{R} = dim\,\mathcal{M}$	2	2

$\mathcal{R}_5 \to \mathcal{A}_4$ y $\mathcal{R}_6 \to \mathcal{A}_5$

¿Cuál es el exponente mínimo con el que una variedad abeliana polarizada es una variedad de Prym-Tyurin?

El cociente $\widehat{X} := \widehat{V}/\widehat{\Lambda}$ es un toro complejo de dimensión g denominado toro dual de X

morfismo, $Pic^0(C)$ adquiere estructura de Variedad principalmente polarizada. En lo sucesivo, identificamos $JC = Pic^0(C)$ vía el isomorfismo

$\widehat{V} = Hom_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de formas $\mathbb{C}$-antilineales $l : V \to \mathbb{C}$

$H^0(C, \omega_C)$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión g de 1-formas holomorfas sobre C

$$\widehat{\Lambda} := \{l \in \widehat{V} | \langle\, l, \Lambda\rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$$

$$\langle\ ,\ \rangle : \widehat{V} \times V \to \mathbb{R},\ \langle l, v\rangle = Im\ l(v)$$

$H_1(C, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano libre de rango $2g$

$$\widehat{X} \xrightarrow{\sim} Pic^0(X)$$

Variedades de Prym Clásicas

Dada una variedad abeliana principalmente polarizada $(X = V/\Lambda, \Theta)$, una subvariedad abeliana $Y \subset X$ $(Y = W/\Lambda \cap W$, donde $W \subset V$ es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de $V)$ e $i : Y \hookrightarrow X$ la inclusión canónica, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi_{i^*\Theta}"'] & X \arrow[d, "\phi_\Theta"] \\ \widehat{Y} & \widehat{X} \arrow[l, "\widehat{i}"'] \end{tikzcd}$$

El exponente $e(i$ ... finito $K(i^*\Theta) =$ $ker\phi_{i^*\Theta}$ (el enter... pequeño tal que $nx = 0$ para to...), se llama exponente de la polarización $i^*\Theta$ en Y. Existe una única isogenia $\psi_{i^*\Theta} : \widehat{Y} \to Y$ tal que $\phi_{i^*\Theta} \circ \psi_{i^*\Theta} = e(i^*\Theta)_{\widehat{Y}}$ y $\psi_{i^*\Theta} \circ \phi_{i^*\Theta} = e(i^*\Theta)_Y$ donde $e(i^*\Theta)_{\widehat{Y}}$ y $e(i^*\Theta)_Y$ son las multiplicaciones por $e(i^*\Theta)$ en $\widehat{Y}$ y Y respectivamente.

Se define el exponente de la subvariedad abeliana Y como el exponente $e(i^*\Theta)$ de la polarización inducida en Y y escribimos $e(Y) = e(i^*\Theta)$

Dado el endomorfismo norma N_Y construimos el
$Z := X^{1-\varepsilon_Y}$ se llama la subvariedad abeliana complementaria de Y en X con respecto a la polarización Θ de X.
de $End_{\mathbb{Q}}(X)$ el cual satisface $\varepsilon_Y = \varepsilon'_Y$ y $\varepsilon_Y^2 = \varepsilon_Y$; en otra palabras, dada la polarización Θ en X, asociamos a una subvariedad abeliana Y de X un idempotente simétrico $\varepsilon_Y \in End_{\mathbb{Q}}(X)$. Inversamente, si ε es un idempotente simétrico en $End_{\mathbb{Q}}(X)$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n\varepsilon \in End(X)$ por lo que se define X^ε como la imagen de $n\varepsilon$.

$$f^* : J(Y) \to J(X)$$

$P \qquad f^*J(Y)$

Sabemos que un morfismo $f : X \to Y$ de cur-
Hay exactamente tres tipos de morfismos para los cuales $P(f)$ es de Prym-Tyurin:

1. f es étale de grado dos.
2. f es de grado dos y dos puntos de ramificación.
3. f es de grado tres, con dos puntos de ramificación, X es de género dos y Y es una curva elíptica.


GRACIAS POR SU ATENCION
Imagen creada en GeneradorMemes.com