Números Hipercomplejos y su relación con la Física

Aldo Martínez-Merino

División de Ciencias e Ingeniería
Universidad de Guanajuato, Campus León

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas, UNACH
23 de Marzo, 2017

Introducción

Diversas clases de objetos algebraicos nos ayudan a formular modelos que nos permiten entender mejor fenómenos físicos, como las álgebras de Clifford para describir el espín, y los números complejos en la formulación de Mecánica Cuántica. ¡Intentos de hacer una cuantización de la gravedad se han llevado a cabo con una Relatividad General compleja!
Al construir modelos que describen tales fenómenos físicos, el introducir un sistema de números diferente a los números reales produce, por ejemplo, diversas soluciones a estos modelos.

Introducción

En este modelado, la interacción entre la Física y la Matemática se vuelve esencial. Como es el caso de Teoría de Cuerdas, una teoría en 10 dimensiones cuyo propósito es describir, entre otras cosas, la interacción de la gravedad con las otras fuerzas fundamentales. Para tal meta, aparecen en juego diversos espacios relacionados con números hipercomplejos.

Plan de la charla

1. Motivación: Rotaciones en el espacio de tres dimensiones.
2. Descripción en términos de cuaterniones.
3. Proceso de Cayley-Dickson; octoniones.
4. Ejemplo de interacción disciplinaria: Álgebras de Jordan.
5. Consideraciones Finales

Rotaciones en el espacio

Consideremos una rotación alrededor de un eje particular en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo alrededor de z

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\theta E_3), \qquad (1)$$

donde

$$E_3 = \left.\frac{\mathrm{d}R(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Similarmente para las otras direcciones,

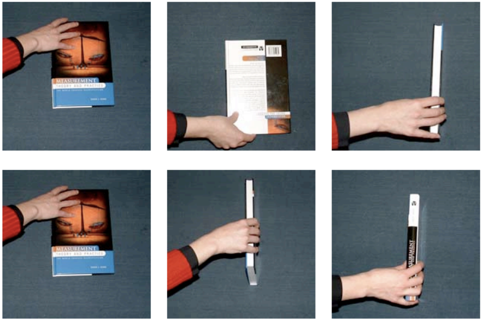
$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Rotaciones en el espacio

Estas matrices cumplen con la siguiente relación

$$E_i E_j - E_j E_i = \sum_k \epsilon_{ijk} E_k . \qquad (4)$$

Es decir, no conmutan. Y en realidad es lo que esperamos, porque...[1]



[1] Tomado de http://plus.maths.org/content/ubiquitous-octonions

Rotaciones en el espacio

Por otro lado, consideremos las *matrices de Pauli*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

que satisfacen una relación similar,

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2\mathrm{i} \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k . \tag{6}$$

Llega a ser (4) si tomamos en su lugar a $\sigma_i/2\mathrm{i}$. De hecho, ¡tienen que describir el mismo objeto!: $\mathfrak{so}(3)$.
En verdad, existe un mapeo que nos lleva de $\mathrm{SU}(2)$ a $\mathrm{SO}(3)$.
Las matrices de Pauli también satisfacen la relación $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} I_{2\times 2}$.

Descripción en términos de cuaterniones

Si consideramos ahora las matrices $\mathrm{i}\sigma_i$, y siendo $\sigma_0 = I_{2\times 2}$, tenemos que

$$(\mathrm{i}\sigma_i)^2 = -\sigma_0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Estas matrices se ven como *raíces de menos uno*. Identificando $\mathrm{i}\sigma_1 \to \mathbf{i}$, $\mathrm{i}\sigma_2 \to \mathbf{j}$ y $\mathrm{i}\sigma_3 \to \mathbf{k}$, definimos un *cuaternion puro*, $\mathbf{r}$ como la siguiente combinación

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Estamos haciendo la identificación de $\{$puntos en $\mathbb{R}^3\}$ con $\{$cuaterniones puros$\}$.

Descripción en términos de cuaterniones

De hecho, se cumplen las relaciones $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$. Además, $\mathbf{ijk} = -1$. Si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son dos cuaterniones puros

$$\mathbf{pq} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \tag{9}$$

Un *cuaternion* es la combinación $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$, con $q_0 \in \mathbb{R}$. A $\bar{q} = q_0 - \mathbf{q}$ se le conoce como el *cuaternion conjugado*, y cada cuaternion distinto de cero, se define su *inverso* como

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \tag{10}$$

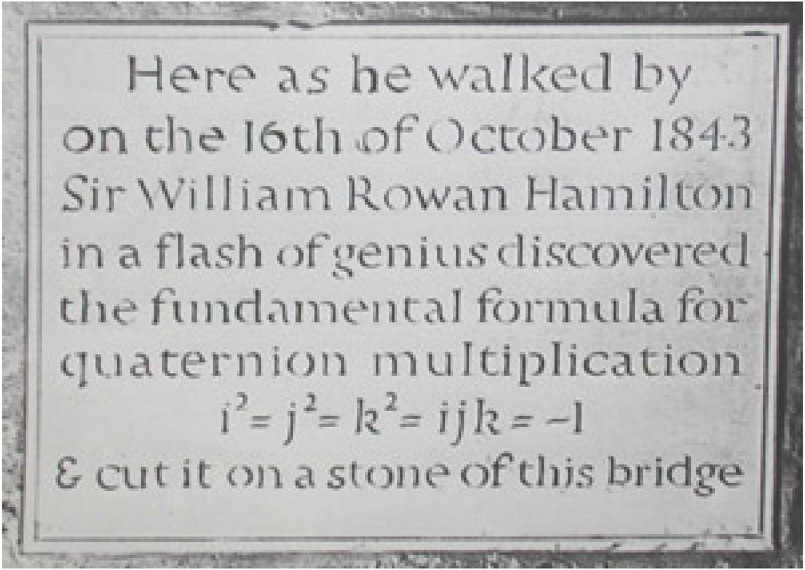
donde $|q|^2 = q\bar{q} = q_0^2 + \sum_i q_i^2$, es la *norma* de q.

Descripción en términos de cuaterniones

Entonces, una rotación del espacio 3 dimensional es llevada a cabo por la operación

$$R(q)\mathbf{r} = q\mathbf{r}q^{-1} \in \mathbb{R}^3, \qquad \text{y} \qquad |R(q)\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|, \tag{11}$$

¡porque $|qp| = |q|\,|p|$!
$R(q)$ y $R(-q)$ definen la misma rotación.


Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

Proceso de Cayley-Dickson

Las propiedades mostradas hasta ahora no son una curiosidad: Los números reales $\mathbb{R}$, los números complejos $\mathbb{C}$, y los cuaterniones $\mathbb{H}$, juntos con los misteriosos *octoniones* $\mathbb{O}$ forman parte de las llamadas *álgebras de Cayley-Dickson*, construidas a partir del *proceso de Cayley-Dickson*:
Sea $\mathbb{B}$ un *álgebra con unidad*; para elementos $a, b, c, d \in \mathbb{B}$ los pares formados (a, b) y con la multipicación definida

$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}) \tag{12}$$

dan lugar a un álgebra $\mathbb{A}$ que tiene unidad que se ve como $\mathbb{A} = \mathbb{B} \oplus \mathbb{B}$.

Proceso de Cayley-Dickson

Comenzando con los números reales: se obtiene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$; si utilizamos los complejos: se obtiene $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$; si usamos los cuaterniones: se obtiene $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.
Sin embargo, si usamos los octoniones obtenemos un álgebra, llamada *sedeniones* $\mathbb{S}$, para la cual la ecuación $ab = 0$ no implica forzosamente que $a = 0$ ó $b = 0$. Esto es, las anteriores son álgebras con división.
¡Y todas cumplen con la ecuación $|qp| = |q|\,|p|$!

Proceso de Cayley-Dickson

La suma de cuadrados de números, es el producto de suma de cuadrados:

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}(1) & - & \text{tienen todas las propiedades algebraicas;} \\ \mathbb{C}(2) & - & \text{ya no son `bien ordenados';} \\ \mathbb{H}(4) & - & \text{ya no conmutan;} \\ \mathbb{O}(8) & - & \textbf{ya no asocian}. \end{array}$$

Esto último quiere decir que $a(bc) \neq (ab)c$.

Los Octoniones

Los octoniones $\mathbb{O}$ son el álgebra normada de mayor dimensión sobre los números reales.
Su base consiste de 7 unidades complejas, $e_i, i = 1, \ldots, 7$, y una real e_0 la cual es la unidad dentro del álgebra, y que satisfacen las siguientes reglas de multiplicación:

$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + C_{ijk} e_k, \quad \text{con} \quad i, j = 1, \ldots, 7, \tag{13}$$

donde C_{ijk} forman las componentes de un tensor totalmente antisimétrico y que toma el valor de $+1$ para las combinaciones $123, 617, 257, 536, 145, 246, 347$.

Los Octoniones

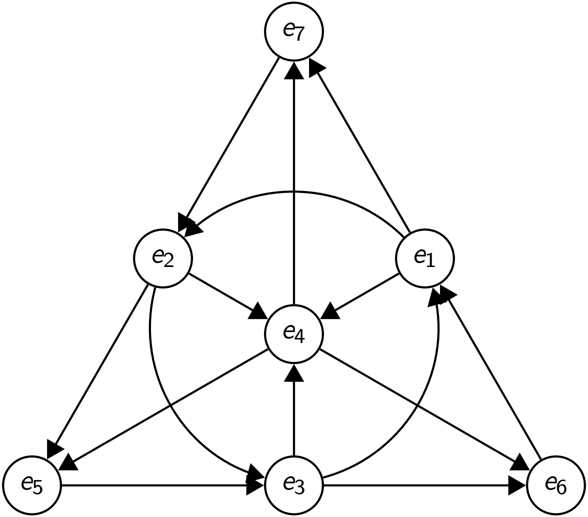


Figura: Plano de Fano

Ejemplo: Álgebras de Jordan

Las *álgebras de Jordan* se introdujeron en un intento por encontrar una formulación de la Mecánica Cuántica que aliviara lo siguiente:

- Producto de matrices Hermíticas no es Hermítica, a menos que conmuten
- Producto por un escalar no es Hermítico, a menos que el escalar sea real

Entre las propiedades que las definen se encuentran

- $J_1 \bullet J_2 = \frac{1}{2}(J_1 J_2 + J_2 J_1)$,
- $(J^2 \bullet A) \bullet J = J^2 \bullet (A \bullet J)$, la *identidad de Jordan*.

Álgebra de Jordan

El intento no fructiferó, dado que la única álgebra de Jordan que no depende explícitamente del producto matricial utilizado es $H_3(\mathbb{O})$, y es de 27 dimensiones. La forma explícita de los elementos del álgebra son

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & o_1 & \bar{o}_2 \\ \bar{o}_1 & \beta & o_3 \\ o_2 & \bar{o}_3 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ and } o_1, o_2, o_3 \in \mathbb{O}. \quad (14)$$

Sin embargo, estas álgebras están relacionadas con geometrías excepcionales, como planos proyectivos octoniónicos $\mathbb{OP}^2$, que a matemáticos han sido bastante interesantes.

Consideraciones Finales

- Hay modelos para describir teorías de norma que usan *álgebras de Freudenthal* con la finalidad de describir interacciones electrodébiles. ¿Podría describir una teoría gravitacional?
- Existen formulaciones de Teoría de Yang-Mills no asociativas donde se pueden estudiar efectos no perturbativos.
- Para obtener modelos que reproduzcan la naturaleza, en teoría M uno compactifica sobre espacios de holonomía G_2, grupo de automorfismos de la parte imaginaria de los octoniones.
- Otra posibilidad es utilizarlos para tener un espacio donde modelar las 10 dimensiones que teoría de cuerdas predice, ya que en términos de grupos se tiene que

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{O}) \cong \mathfrak{so}(9, 1), \tag{15}$$

que recuerda a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3, 1)$.

¡Gracias!