¿Qué es la Teoría de Punto Fijo?

Francisco Eduardo Castillo Santos

Catedrático CONACyT - UJAT
Seminario de la Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Chiapas

19 de enero de 2017

Estructura de la plática

Teorema de Punto fijo de Brouwer

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $f : B_n \to B_n$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.

Teorema de Punto fijo de Brouwer

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $f : B_n \to B_n$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, compacto y no vacío y $f : K \to K$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.

Teorema de Punto fijo de Brouwer

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $f : B_n \to B_n$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, compacto y no vacío y $f : K \to K$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.

Teorema

Sea X un espacio de Banach y $K \subset X$ un subconjunto convexo, compacto y no vacío. Si $f : K \to K$ es continua entonces tiene un punto fijo

Principio de Contracción de Banach

Definición

Sea (M, d) un espacio métrico y $f : M \to M$ una función. Diremos que f es una contracción si existe $k \in [0, 1)$ tal que para todo $x, y \in M$ se tiene que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Principio de Contracción de Banach

Definición

Sea (M, d) un espacio métrico y $f : M \to M$ una función. Diremos que f es una contracción si existe $k \in [0, 1)$ tal que para todo $x, y \in M$ se tiene que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Teorema.

Sea (M, d) un espacio métrico completo. Si $f : M \to M$ es una contracción entonces tiene un único punto fijo x_0. Además si $x_1 \in M$ es un punto arbitrario y definimos $x_{n+1} = T(x_n)$, entonces $\{x_n\}$ converge a x_0 .

Generalizando el Principio de Contracción de Banach

Convexidad

Si $f : S^1 \to S^1$ es una rotación por un ángulo en $(0, 2\pi)$alrededor del origen, f no tiene puntos fijos en S^1.

Generalizando el Principio de Contracción de Banach

Convexidad

Si $f : S^1 \to S^1$ es una rotación por un ángulo en $(0, 2\pi)$alrededor del origen, f no tiene puntos fijos en S^1.

Cerradura

Sea $f : (0, 1) \to (0, 1)$ definida por $f(x) = \frac{x}{2}$, es una contracción y no tiene puntos fijos en $(0, 1)$.

Generalizando el Principio de Contracción de Banach

Convexidad

Si $f : S^1 \to S^1$ es una rotación por un ángulo en $(0, 2\pi)$alrededor del origen, f no tiene puntos fijos en S^1.

Cerradura

Sea $f : (0,1) \to (0,1)$ definida por $f(x) = \frac{x}{2}$, es una contracción y no tiene puntos fijos en $(0,1)$.

Acotamiento

En cualquier espacio de Banach una traslación por un vector distinto de 0 es una isometría que no tiene puntos fijos.

El Problema de Punto fijo

Definición

Sea (M, d) un espacio métrico y $f : M \to M$ una función. Diremos que f es no expansiva si para todos $x, y \in M$ se tiene que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

El Problema de Punto fijo

Definición

Sea (M, d) un espacio métrico y $f : M \to M$ una función. Diremos que f es no expansiva si para todos $x, y \in M$ se tiene que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

Definición

Sea X un espacio de Banach y $C \subset X$ un conjunto convexo,cerrado, acotado y no vacío . Diremos que C tiene la **propiedad de punto fijo** si para toda f**unción no expansiva** $T : C \to C$ tiene un punto fijo.

El problema de Punto Fijo.

Definición

Sea X un espacio de Banach. Diremos que X tiene la **propiedad de punto fijo** si todo subconjunto convexo, cerrado, acotado y no vacío tiene la propiedad de punto fijo.

Ejemplos

Ejemplo

El Teorema de Brouwer garantiza que los espacios de dimensión finita tienen la propiedad de punto fijo.

Ejemplos

Ejemplo

El Teorema de Brouwer garantiza que los espacios de dimensión finita tienen la propiedad de punto fijo.

Ejemplo

Todo espacio de Hilbert tiene la propiedad de punto fijo.

Ejemplos

Ejemplo

El Teorema de Brouwer garantiza que los espacios de dimensión finita tienen la propiedad de punto fijo.

Ejemplo

Todo espacio de Hilbert tiene la propiedad de punto fijo.

Ejemplo

Para todo $1 < p < \infty$ el espacio ℓ_p tiene la propiedad de punto fijo.

Ejemplos donde no se tiene la p.p.f

Ejemplo

El espacio c_0 de sucesiones convergentes a 0 con la norma del supremo no tiene la propiedad de punto fijo.
Si consideramos la función $T : B_{c_0} \to B_{c_0}$ definida por $T(x_1, x_2, ...) = (1, x_1, x_2, ...)$ es una isometría que no tiene puntos fijos en B_{c_0}

Ejemplo

El espacio ℓ_1 de sucesiones absolutamente sumables con la norma $\|(x_1, x_2, ...)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ no tiene la propiedad de punto fijo.

Consideramos el conjunto $C = \{(x_1, x_2, ...) \in \ell_1 : x_n \geq 0, \|(x_1, x_2, ...)\| = 1\}$ es cerrado, convexo, acotado y no vacío y la función $T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ no tiene puntos fijos en C

Estructura normal

Definición

Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto convexo, cerrado, acotado y no vacío. Diremos que $x \in C$ es **diametral** si $\sup\{\|x-y\| : y \in C\} = diam(C)$

Estructura normal

Definición

Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto convexo, cerrado, acotado y no vacío. Diremos que $x \in C$ es **diametral** si $\sup\{\|x-y\| : y \in C\} = diam(C)$

Definición

Sea X un espacio de Banach. Diremos que X tiene **estructura normal** si todo subconjunto cerrado, convexo, acotado y no vacío contiene un punto que no es diametral.

Sucesiones que aproximan a un punto fijo

Definición

Sea X un espacio de Banach y $C \subset X$ cerrado, convexo, acotado y no vacío y $T : C \to C$ una función no expansiva. Diremos que $\{x_n\} \subset C$ es una sucesión que aproxima a un punto fijo para T si $\lim_{n \to \infty} \|T(x_n) - x_n\| = 0$

Teorema de Goebel - Karlovitz

Teorema

Sea X un espacio de Banach si $C \subset X$ es débilmente compacto y convexo y $T : C \to C$ es no expansiva. Sea $K \subset C$ convexo,débilmente compacto y T-invariante que es minimal con respecto a estas propiedades. Si $\{x_n\}$ es una sucesión que aproxima a un punto fijo para T en K, entonces para todo $x \in K$ se tiene $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = diam(K)$. En particular todo elemento de K es un punto diametral.

El Teorema de Kirk

Teorema

Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si X tiene estructura normal, entonces X tiene la propiedad de punto fijo.

Propiedad de punto fijo débil

Definición

Sea X un espacio de Banach. Diremos que X tiene la **propiedad de punto fijo débil**, si todo subconjunto convexo y débilmente compacto tiene la propiedad de punto fijo.

Teorema de Kirk

Sea X un espacio de Banach, si X tiene estructura normal, entonces X tiene la propiedad de punto fijo débil.

Propiedad de punto fijo débil

Ejemplo

El espacio c_0 tiene la propiedad débil de punto fijo. Esto fue probado por B. Maurey en 1980 usando técnicas de ultraproducto.

Propiedad de punto fijo débil

Ejemplo

El espacio c_0 tiene la propiedad débil de punto fijo. Esto fue probado por B. Maurey en 1980 usando técnicas de ultraproducto.

Ejemplo

En ℓ_1 compacidad débil es equivalente a compacidad en norma, entonces ℓ_1 tiene la propiedad de punto fijo débil.

Propiedad de punto fijo débil

Ejemplo

El espacio c_0 tiene la propiedad débil de punto fijo. Esto fue probado por B. Maurey en 1980 usando técnicas de ultraproducto.

Ejemplo

En ℓ_1 compacidad débil es equivalente a compacidad en norma, entonces ℓ_1 tiene la propiedad de punto fijo débil.

Ejemplo

Todo espacio con la propiedad de punto fijo tiene la propiedad débil de punto fijo.

Módulo de Convexidad de Clarkson

Definición

Sea X un espacio de Banach, el módulo de convexidad de Clarkson es la función $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ definida por
$\delta_X(\epsilon) = \text{ínf}\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \epsilon\}$

Módulo de Convexidad de Clarkson

Definición

Sea X un espacio de Banach, el módulo de convexidad de Clarkson es la función $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ definida por
$\delta_X(\epsilon) = \text{ínf}\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \epsilon\}$

Definición

Sea X un espacio de Banach, el coeficiente de convexidad de X es $\epsilon_0(X) = \sup\{\epsilon \in [0,2] : \delta_X(\epsilon) = 0\}$.

Espacios uniformemente no cuadrados

Definición

Sea X un espacio de Banach. Diremos que X es uniformemente no cuadrado si $\epsilon_0(X) < 2$.

Espacios uniformemente no cuadrados

Definición

Sea X un espacio de Banach. Diremos que X es uniformemente no cuadrado si $\epsilon_0(X) < 2$.

Teorema

Si X es uniformemente no cuadrado entonces es super reflexivo.

Teorema

Si $\epsilon_0(X) < 1$ entonces X tiene estructura normal. Existe un espacio de Banach X con $\epsilon_0(X) = 1$ que no tiene estructura normal.

La p.p.f en espacios uniformemente no cuadrados

Teorema [E. Mazcuñan et. al 2005]

Si X es uniformemente no cuadrado entonces X tiene la propiedad de punto fijo.

La p.p.f en espacios uniformemente no cuadrados

Teorema [E. Mazcuñan et. al 2005]

Si X es uniformemente no cuadrado entonces X tiene la propiedad de punto fijo.

La demostración de este Teorema requiere el uso de técnicas de ultraproducto de espacios de Banach.

Espacios E - convexos

Definición

Sea X un espacio de Banach. Sea $n \in \mathbb{N}$ definimos $O(n, X) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : \exists\{x_1, ..., x_n\} \in B_X \ni \|x_i \pm x_j\| \geq 2 - \epsilon, \forall i \neq j \in \{1, ..., n\}$.
Diremos que X es O- convexo si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $O(n, X) > 0$. Diremos que X es E-convexo si X^*es O-convexo.

Teorema

Si X es E- convexo, entonces X es superreflexivo.

E convexidad implica la p.p.f

Teorema

Si X es uniformemente no cuadrado entonces es E- convexo.

Teorema [C. Lennard et al 2008]

Si X es E-convexo entonces X tiene la propiedad de punto fijo.

Renorma en ℓ_1

Todos los resultados anteriores necesitan reflexividad o proponen condiciones que garantizan reflexividad. Hasta el 2008 no se conocían resultados para espacios no reflexivos. En ese año P. K. Lin demostró el siguiente teorema.

Renorma en ℓ_1

Todos los resultados anteriores necesitan reflexividad o proponen condiciones que garantizan reflexividad. Hasta el 2008 no se conocían resultados para espacios no reflexivos. En ese año P. K. Lin demostró el siguiente teorema.

Teorema P.K.Lin 2008

Para $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_1$ definimos
$\|x\| = \sup\{\gamma_n \sum_{k=n}^{\infty} |x_n| : n \in \mathbb{N}\}$, donde γ_k es una sucesión creciente en $[0, 1)$ convergente a 1. Entonces el espacio $(\ell_1, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad de punto fijo.

Generalización del Teorema de Lin

Propiedades

Sea X un espacio de Banach y $R_k : X \to [0, \infty)$ $(k \geq 1)$ una familia de seminormas tales que:

$R_1(x) = \|x\|$ y $\forall k \geq 2$ $R_k(x) \leq \|x\|$.

Sea $\{\gamma_k\} \subset (0, 1)$ una sucesión creciente y convergente a 1.

Definimos $|||x||| = \sup\limits_{k \geq 1}\{\gamma_k R_k(x)\}$.

Propiedades

Propiedades

Sea τ una topología lineal en X y que la familia de seminormas satisfacen:
$\lim R_k(x) = 0.$

Propiedades

Propiedades

Sea τ una topología lineal en X y que la familia de seminormas satisfacen:
$\lim R_k(x) = 0$.
Si $x_n \xrightarrow{\tau} 0$. $\limsup R_k(x_n) = \limsup \|x_n\|$

Propiedades

Propiedades

Sea τ una topología lineal en X y que la familia de seminormas satisfacen:

$\lim R_k(x) = 0.$

Si $x_n \xrightarrow{\tau} 0.$ $\limsup R_k(x_n) = \limsup \|x_n\|$

$\limsup R_k(x_n + x) = \limsup R_k(x_n) + R_k(x)$

Generalización del resultado de Lin

Teorema [C. Hernández, M. Japón]

Si la topología τ satisface que toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente. Entonces $(X, |||\cdot|||)$ tiene la propiedad de punto fijo.

Ejemplos

Ejemplo

Si G es un grupo separable y compacto, $B(G)$ (El álgebra de Fourier - Steiljes de G)se puede renormar para tener la propiedad de punto fijo

Ejemplo

El resultado de Lin se obtiene usando $\tau = \omega^*$ y $R_k(x) = \|(I - P_{k-1})(x)\|$.

Propiedad S_m

Definición

Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$, diremos que A es métricamente convexo si para todos $x, y \in A$ y para todo $\delta \in [0, 1]$ existe un $z \in A$ tal que $\|x - z\| = \delta\|x - y\|$ y $\|z - y\| = (1 - \delta)\|x - y\|$.

Propiedad S_m

Definición

Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$, diremos que A es métricamente convexo si para todos $x, y \in A$ y para todo $\delta \in [0,1]$ existe un $z \in A$ tal que $\|x - z\| = \delta\|x - y\|$ y $\|z - y\| = (1 - \delta)\|x - y\|$.

Definición

Sea X un espacio de Banach. Diremos que X tiene la propiedad S si para todo $A \subset S_X$ métricamente convexo y con $diam(A) \leq 1$ existe $f \in X^*$ tal que $f(x) > 0$ para toda $x \in A$.

Propiedad S_m

Lema

Si X es uniformemente no cuadrado y tiene la propiedad WORTH entonces X tiene la propiedad S_m.