Sobre el Cálculo de Variaciones y algunas aplicaciones.

Carlos Alberto Hernández Linares, Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana.

Seminario Semanal de la FCFM, UNACH

75 ANIVERSARIO Universidad Veracruzana 1944-2019

Contenido

- Funcionales.
- Extremos de funcionales.
- Aplicaciones.

¿Qué es un funcional?

Un funcional es una regla de correspondencia que a cada función (curva) le asocia un número real.

Ejemplos.

- A cada curva podemos asociarle su longitud.
- Suponiendo que cada curva en el plano está hecha de un material homogéneo, podemos relacionarla con la abscisa de su centro de masas.
- Si cada curva que una los puntos A y B en el plano tiene definida una velocidad en cada punto (x, y). Podríamos asociar cada curva con el tiempo que le tomaría a una partícula que recorre dicha curva.

Problemas.

- Encontrar la curva de longitud mínima que une los puntos A y B en el plano.

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

- Encontrar la curva en la cual una partícula, bajo la influencia de la gravedad, llega del punto A al punto B en el menor tiempo posible.
- De todas las curvas cerradas de longitud L encontrar aquella que encierra el área más grande posible.

Problemas.

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

$$\frac{\int_a^b x\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx}$$

El metodo de diferencias finitas.

Considere el funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx, \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B.$$

Divida el intervalo $[a, b]$ en $n + 1$ partes iguales, bajo la elección adecuada de puntos$a = x_0 < x_1 < x_2, \cdots < x_n < x_{n+1} = b$.
Reemplace la curva por la poligonal que pasa por los puntos:

$$(x_0, A), (x_1, y(x_1)), \ldots, (x_n, y(x_n)), (x_{n+1}, B).$$

Aproxime el funcional por la suma

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n+1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) h,$$

donde $y_i = y(x_i)$ y $h = x_i - x_{i-1}$.

Espacios de funciones.

- $C[a, b]$ será el conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.
- $C_1[a, b]$ será el conjunto de las funciones con primera derivada continua en el intervalo $[a, b]$.
- $C_2[a, b]$ será el conjunto de las funciones con segunda derivada continua en el intervalo $[a, b]$.

Operaciones vectoriales.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Definición.

Una norma es una función no negativa, $\|\cdot\|$,definida sobre un espacio vectorial que satisface

1. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\|y\|_{\infty} := \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|$$

$$\|y\|_{\infty,1} := \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)|$$

$$\|y\|_{\infty,1} := \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|$$

Continuidad de funcionales

Definicion.

Sea X un espacio normado. Un funcional $J : X \to \mathbb{R}$ es continuo en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |J(x) - J(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Continuidad de funcionales

Definicion.

Sea X un espacio normado. Un funcional $J : X \to \mathbb{R}$ es continuo en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |J(x) - J(x_0)| \leq \varepsilon.$$

$$J(x) - J(x_0) > -\varepsilon \qquad\qquad J(x) - J(x_0) < \varepsilon$$

Continuidad de funcionales

Definicion.

Sea X un espacio normado. Un funcional $J : X \to \mathbb{R}$ es continuo en $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |J(x) - J(x_0)| \leq \varepsilon.$$

$J(x) - J(x_0) > -\varepsilon$	$J(x) - J(x_0) < \varepsilon$
semincontinuidad inferior	semicontinuidad superior

Definición.

Un funcional $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es lineal si para cualesquiera $h_1, h_2 \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ satisface

1. $\varphi(\lambda h_1) = \lambda \varphi(h_1)$;
2. $\varphi(h_1 + h_2) = \varphi(h_1) + \varphi(h_2)$;

Ejemplos en $C[a, b]$.

$$\varphi(h) = h(x_0)$$

$$\varphi(h) = \int_a^b h(x)dx$$

$$\varphi(h) = \int_a^b \alpha(x)h(x)dx$$

Diferencial de un funcional.

$$\Delta J(h) = J(y+h) - J(y)$$

Definición.

Un funcional J se dice diferenciable en y si existe un funcional lineal φ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \frac{|\Delta J(h) - \varphi(h)|}{\|h\|} < \varepsilon.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\Delta J(h) - \varphi(h)|}{\|h\|} = 0.$$

La unicidad de la diferencial.

Lema.

Si φ es un funcional lineal continuo tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0,$$

entonces φ es el funcional nulo.

Demostración.

Suponga que φ no es identicamente cero, entonces existe $h_0 \neq 0$ tal que $varphi(h_0) \neq 0$. La sucesión $h_n = \frac{h_0}{n}$ converge a cero y por la continuidad de φ se deduce que

$$0 = \lim_{n} \frac{\varphi(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n} \frac{\frac{\varphi(h_0)}{n}}{\frac{\|h_0\|}{n}} = \frac{\varphi(h_0)}{\|h_0\|} \neq 0.$$

Lo que sería una contradicción. □

La unicidad de la diferencial.

Supongamos que existen φ_1 y φ_2 que satisfacen la definición de diferencial, entonces

$$\frac{|\varphi_1(h)-\varphi_2(h)|}{\|h\|} \leq \frac{|\varphi_1(h)-\Delta J(h)|}{\|h\|} + \frac{|\Delta J(h)-\varphi_2(h)|}{\|h\|}.$$

Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varphi_1(h)-\varphi_2(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Y por el lema anterior $\varphi_1(h)=\varphi_2(h)$ para cada $h\in X$.

La unicidad de la diferencial.

Supongamos que existen φ_1 y φ_2 que satisfacen la definición de diferencial, entonces

$$\frac{|\varphi_1(h)-\varphi_2(h)|}{\|h\|} \leq \frac{|\varphi_1(h)-\Delta J(h)|}{\|h\|} + \frac{|\Delta J(h)-\varphi_2(h)|}{\|h\|}.$$

Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varphi_1(h)-\varphi_2(h)}{\|h\|} = 0.$$

Y por el lema anterior $\varphi_1(h)=\varphi_2(h)$ para cada $h\in X$.

δJ

Máximos y mínimos.

Máximo local en y: Existe $\delta > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \Delta J(h) \leq 0.$$

Mínimo local: Existe $\delta > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \Delta J(h) \geq 0.$$

Máximo global en y: $\Delta J(h) \leq 0$ para todo $h \in X$.

Mínimo global en y: $\Delta J(h) \geq 0$ para todo $h \in X$.

Teorema.

Si J es un funcional diferenciable y tiene un extremo en y, entonces su diferencial en y es nula; i.e.

$$\delta J(h) = 0,$$

para cada $h \in X$.

Teorema.

Si el funcional

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

definido sobre un conjunto de funciones $y(x)$ que tienen primera derivada continua en $[a, b]$ y que satisfacen las condiciones de frontera $y(a) = A$ y $y(b) = B$, tiene un extremo en en la función $y = y(x)$, entonces y satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Casos particulares de la ecuación de Euler-Lagrange.

Integrando	Ecuación de Euler-Lagrange
$F(x, y')$	$F_{y'} = C$
$F(y, y')$	$F - y' F_{y'} = C$
$F(x, y)$	$F_y(x, y) = 0$
$f(x, y)\sqrt{1 + (y')^2}$	$f_y - f_x y' - f \frac{y''}{1+(y')^2} = 0$

Refracción.

Supongamos un medio no homogéneo, formado por dos medios homogéneos I y II separados por una recta r. Sea A y B dos puntos dados de I y II respectivamente. Entonces un rayo luminoso que va de A hasta B lo hace a través de una trayectoria que es rectilínea en cada medio considerado y tal que si O es el punto de la recta r por el que pasa, se tiene que el cociente entre el seno del ángulo de incidencia θ_1 y el seno del ángulo de refracción θ_2, es igual $\frac{v_1}{v_2}$, siendo v_1 y v_2, respectivamente, las velocidades de propagación de la luz en I y II. Es decir

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

Principio de Fermat, S. XVII.

Un rayo luminoso que va de A hasta B, lo hace a través de una trayectoria tal que el tiempo empleado en su recorrido es mínimo.

Se eligen $A = (0, a)$, $B = (d, -b)$. Si $O = (x, 0)$ el tiemplo empleado en la trayectoria es

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Ejemplo sin dependencia de y.

$$J(y)=\int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx$$

sujeto a $y(1)=0$ y $y(2)=1$.

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}=C$$

$$(y')^2(1-C^2x^2)=C^2x^2$$

$$y'=\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$$

$$(y-C_1)^2+x^2=\frac{1}{C^2}$$

$$(y-2)^2+x^2=5$$

La trayectoria más corta que une dos puntos

$J(u) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx$, sujeto a $y(a) = \alpha$ y $y(b) = \beta$.

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

$$y' = A$$

$$y = Ax + B$$

$$y = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha$$

La braquistócrona

Es la curva de descenso más rápido; es decir, la curva que une dos puntos y que es recorrida en el menor tiempo, por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto, vajo la acción de la fuerza de gravedad y suponiendo que no existe fricción.

$$J(y) = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} dx$$

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} - \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} = C$$

$$\frac{1}{y(1+(y')^2)} = C$$

$$y' = \frac{2a-y}{y}, \qquad \frac{1}{C^2} = 2a$$

$$x - x_0 = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}} dy$$

$$x - x_0 = 2a \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1-\cos\theta)$$

Gracias