La infinita soledad de los números primos: topología, literatura y cine

Florencio Corona Vázquez

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Chiapas

Seminario
FCFM - UNACH
25 de Octubre de 2018

Un resultado bien conocido en la teoría elemental de números dice que el conjunto de los números primos es infinito.

Un resultado bien conocido en la teoría elemental de números dice que el conjunto de los números primos es infinito.

Existen varias demostraciones de este resultado, la primera de ellas atribuida a Euclides; en esta ocasión detallaremos el enfoque topológico que realizó el matemático israelí Hillel Furstenberg, utilizando conceptos básicos de topología, como conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.

Un ***número primo*** es un número natural, que tiene exactamente dos divisores, él mismo y el 1. También se puede definir como aquel número natural que no puede expresarse como producto de dos números naturales más pequeños que él, o bien, como producto de dos naturales de más de una forma.

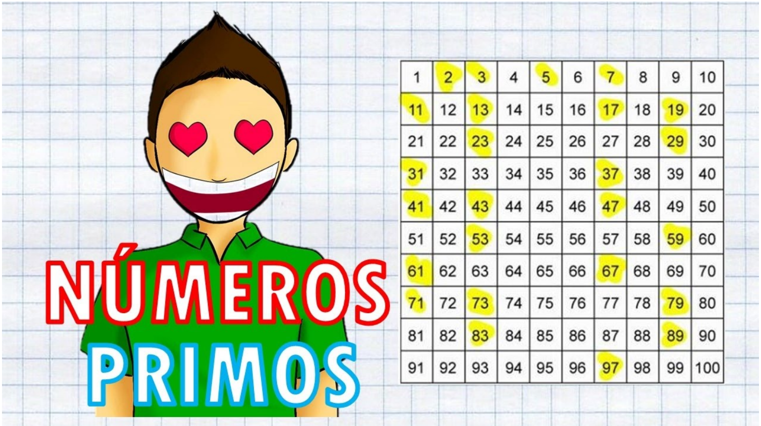
Un ***número primo*** es un número natural, que tiene exactamente dos divisores, él mismo y el 1. También se puede definir como aquel número natural que no puede expresarse como producto de dos números naturales más pequeños que él, o bien, como producto de dos naturales de más de una forma.

Conviene observar que con cualquiera de las dos definiciones el 1 queda excluido del conjunto de los números primos.

Un ***número primo*** es un número natural, que tiene exactamente dos divisores, él mismo y el 1. También se puede definir como aquel número natural que no puede expresarse como producto de dos números naturales más pequeños que él, o bien, como producto de dos naturales de más de una forma.

Conviene observar que con cualquiera de las dos definiciones el 1 queda excluido del conjunto de los números primos.

El término primo no significa que sean parientes. Deriva del latín “primus” que significa primero (protos en griego). El teorema fundamental de la aritmética afirma que todo número natural mayor que 1 se expresa de forma única como producto de números primos. Por eso se les considera los ”primeros”, a partir de ellos obtenemos todos los demás números naturales. (El 15 se obtiene multiplicando los primos 3 y 5)


NÚMEROS
PRIMOS
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Existen entre los números primos algunos aún más especiales. Son aquellos llamados ***primos gemelos***, pues entre ellos se interpone siempre un número par. Así, números como el 11 y el 13, el 17 y el 19, o el 41 y el 43, permanecen próximos, pero sin llegar a tocarse nunca.

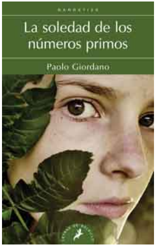
Existen entre los números primos algunos aún más especiales. Son aquellos llamados ***primos gemelos***, pues entre ellos se interpone siempre un número par. Así, números como el 11 y el 13, el 17 y el 19, o el 41 y el 43, permanecen próximos, pero sin llegar a tocarse nunca.

(3, 5)	(5, 7)	(11, 13)	(17, 19)	(29, 31)	(41, 43)
(59, 61)	(71, 73)	(101, 103)	(107, 109)	(137, 139)	(149, 151)
(179, 181)	(191, 193)	(197, 199)	(227, 229)	(239, 241)	(269, 271)
(281, 283)	(311, 313)	(347, 349)	(419, 421)	(431, 433)	(461, 463)
(521, 523)	(569, 571)	(599, 601)	(617, 619)	(641, 643)	(659, 661)
(809, 811)	(821, 823)	(827, 829)	(857, 859)	(881, 883)	

Los números primos cada vez aparecen más aislados en la infinita serie de los números naturales, hasta quedarse relativamente solos, pero la peculiaridad que los sitúa entre una multitud de números naturales también determina que antes o después se forme una pareja de gemelos.

Los números primos cada vez aparecen más aislados en la infinita serie de los números naturales, hasta quedarse relativamente solos, pero la peculiaridad que los sitúa entre una multitud de números naturales también determina que antes o después se forme una pareja de gemelos.

Esta verdad matemática es la hermosa metáfora que el físico teórico y escritor ***Paolo Giordano*** ha escogido para narrar la historia de Alice y Mattia, ha recurrido al lenguaje matemático para expresar el dolor, la impotencia y la soledad de sus vidas lastradas por un trauma físico y psíquico.



...querrían ser como los demás, números normales y corrientes, y que por alguna razón no podían...
...entre ellos siempre hay un número par que les impide ir realmente unidos, el verdadero destino de los números primos es quedarse solos....
...las matemáticas lo llevaron a los rincones más apartados y fascinantes de la razón humana... dónde estaba el límite entre el ser y el no ser algo...


Los numeros primos gemelos están destinados a encontrarse,
pero no a estar juntos

La topología

Vivían la lenta e invisible compenetración de sus respectivos universos, eran como dos astros que gravitasen alrededor del mismo eje en órbitas cada vez más próximas y cuyo destino era colisionar en algún punto del espacio y del tiempo.

Definición

Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X ($\tau \subset \mathscr{P}(X)$) es una ***topología*** sobre X si τ satisface las siguientes propiedades:

Definición

Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X ($\tau \subset \mathscr{P}(X)$) es una ***topología*** sobre X si τ satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X$ pertenecen a τ

Definición

Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X ($\tau \subset \mathscr{P}(X)$) es una ***topología*** sobre X si τ satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X$ pertenecen a τ
2. Si $\{U_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\} \subseteq \tau$ entonces $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} U_\alpha \in \tau$, es decir:

   La unión de cualquier número de elementos de τ pertenece a τ.

Definición

Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X ($\tau \subset \mathscr{P}(X)$) es una ***topología*** sobre X si τ satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X$ pertenecen a τ
2. Si $\{U_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\} \subseteq \tau$ entonces $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} U_\alpha \in \tau$, es decir:

   La unión de cualquier número de elementos de τ pertenece a τ.
3. Si $U_1, U_2, U_3, \cdots, U_n \in \tau$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$, es decir:

   La intersección de un número finito de elementos de τ es un elemento de τ.

A los elementos de τ se les llaman ***conjuntos abiertos*** y al par (X, τ) se le dice ***espacio topológico***.

A los elementos de τ se les llaman ***conjuntos abiertos*** y al par (X,τ) se le dice ***espacio topológico***.

Ejemplo

Considere el conjunto $X=\{a,b,c\}$, cada una de las colecciones $\tau_a=\{\emptyset,X,\{a\}\}$ y $\tau_b=\{\emptyset,X,\{b\}\}$ es una topología sobre X. Sin embargo la colección $\tau_{a,b}=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\}\}$ no lo es, ya que $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin\tau_{a,b}$.

A los elementos de τ se les llaman ***conjuntos abiertos*** y al par (X,τ) se le dice ***espacio topológico***.

Ejemplo

Considere el conjunto $X=\{a,b,c\}$, cada una de las colecciones $\tau_a=\{\emptyset,X,\{a\}\}$ y $\tau_b=\{\emptyset,X,\{b\}\}$ es una topología sobre X. Sin embargo la colección $\tau_{a,b}=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\}\}$ no lo es, ya que $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin\tau_{a,b}$.

Ejemplo

Ahora tomemos el conjunto $X=\mathbb{R}$, consideremos la colección $\tau=\{U\subset\mathbb{R}:\forall x\in U,\exists a,b\in\mathbb{R},a<x<b$ tal que $(a,b)\subset U\}$. La colección τ es una topología sobre $\mathbb{R}$, conocida como la topología usual.

Definición

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es ***cerrado*** si y sólo si el complemento de A, $X \setminus A$, es abierto, *i.e.*, $X \setminus A \in \tau$.

Definición

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es ***cerrado*** si y sólo si el complemento de A, $X \setminus A$, es abierto, *i.e.*, $X \setminus A \in \tau$.

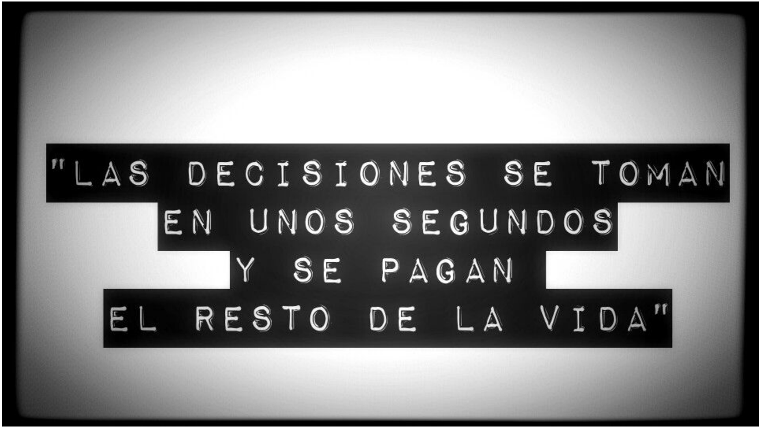
Por definición de topología se tiene que la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto y que la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, por la leyes de De Morgan es fácil demostrar que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Definición

Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es ***cerrado*** si y sólo si el complemento de A, $X \setminus A$, es abierto, *i.e.*, $X \setminus A \in \tau$.

Por definición de topología se tiene que la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto y que la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, por la leyes de De Morgan es fácil demostrar que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Ejemplos de conjuntos cerrados...


"LAS DECISIONES SE TOMAN
EN UNOS SEGUNDOS
Y SE PAGAN
EL RESTO DE LA VIDA"

Para probar que el conjunto $\mathbb{P}$ de números primos es infinito, necesitamos hallar un espacio topológico apropiado.

Para probar que el conjunto $\mathbb{P}$ de números primos es infinito, necesitamos hallar un espacio topológico apropiado.

Sea $X = \mathbb{Z}$. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$ definimos:

$$F_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\} = a + \mathbb{Z}b.$$

Más explícitamente,

$$F_{a,b} = \{a, a \pm b, a \pm 2b, a \pm 3b, \dots\}$$

A estos conjuntos se les conoce como progresiones aritméticas.

Note que toda progresión aritmética, $F_{a,b}$, es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$.

Consideremos la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\tau = \{G \subseteq \mathbb{Z} : \forall a \in G, \exists\, b > 0 \; tal \; que \; F_{a,b} \subseteq G\} \bigcup \{\emptyset\}$$

Consideremos la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\tau = \{G \subseteq \mathbb{Z} : \forall a \in G, \exists\, b > 0 \; tal \; que \; F_{a,b} \subseteq G\} \bigcup \{\emptyset\}$$

Proposición.

El par $(\mathbb{Z}, \tau)$ es un espacio topológico.

Demostración:

- $\emptyset \in \tau$ por definición.

Demostración:

- $\emptyset \in \tau$ por definición.
- Dado $a \in \mathbb{Z}$ existe b entero positivo tal que $F_{a,b} \subseteq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\mathbb{Z} \in \tau$.

Demostración:

- $\emptyset \in \tau$ por definición.
- Dado $a \in \mathbb{Z}$ existe b entero positivo tal que $F_{a,b} \subseteq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\mathbb{Z} \in \tau$.
- Sea $\{G_i : i \in \mathscr{A}\}$ una colección de elementos de τ, debemos mostrar que $\bigcup_{i \in \mathscr{A}} G_i \in \tau$.

Demostración:

- $\emptyset \in \tau$ por definición.
- Dado $a \in \mathbb{Z}$ existe b entero positivo tal que $F_{a,b} \subseteq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\mathbb{Z} \in \tau$.
- Sea $\{G_i : i \in \mathscr{A}\}$ una colección de elementos de τ, debemos mostrar que $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i \in \tau$.

  Sea $a \in \bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i$

Demostración:

- $\emptyset \in \tau$ por definición.
- Dado $a \in \mathbb{Z}$ existe b entero positivo tal que $F_{a,b} \subseteq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\mathbb{Z} \in \tau$.
- Sea $\{G_i : i \in \mathscr{A}\}$ una colección de elementos de τ, debemos mostrar que $\bigcup_{i \in \mathscr{A}} G_i \in \tau$.

  Sea $a \in \bigcup_{i \in \mathscr{A}} G_i$entonces $a \in G_{i_0}$, para algún $i_0 \in \mathscr{A}$. Puesto que $G_{i_0} \in \tau$,

Demostración:

- $\emptyset \in \tau$ por definición.
- Dado $a \in \mathbb{Z}$ existe b entero positivo tal que $F_{a,b} \subseteq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\mathbb{Z} \in \tau$.
- Sea $\{G_i : i \in \mathscr{A}\}$ una colección de elementos de τ, debemos mostrar que $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i \in \tau$.

  Sea $a \in \bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i$entonces $a \in G_{i_0}$, para algún $i_0 \in \mathscr{A}$. Puesto que $G_{i_0} \in \tau$,existe un entero positivo b tal que $F_{a,b} \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i$.

Demostración:

- $\emptyset \in \tau$ por definición.
- Dado $a \in \mathbb{Z}$ existe b entero positivo tal que $F_{a,b} \subseteq \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\mathbb{Z} \in \tau$.
- Sea $\{G_i : i \in \mathscr{A}\}$ una colección de elementos de τ, debemos mostrar que $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i \in \tau$.

  Sea $a \in \bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i$entonces $a \in G_{i_0}$, para algún $i_0 \in \mathscr{A}$. Puesto que $G_{i_0} \in \tau$,existe un entero positivo b tal que $F_{a,b} \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{i \in \mathscr{A}} G_i \in \tau$.

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$.

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos,

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos, existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $F_{a,b_1} \subseteq G_1$ y $F_{a,b_2} \subseteq G_2$.

Afirmamos que $F_{a,b_1 b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos, existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $F_{a,b_1} \subseteq G_1$ y $F_{a,b_2} \subseteq G_2$.

Afirmamos que $F_{a,b_1 b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Si $x \in F_{a,b_1 b_2}$

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos, existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $F_{a,b_1} \subseteq G_1$ y $F_{a,b_2} \subseteq G_2$.

Afirmamos que $F_{a,b_1 b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Si $x \in F_{a,b_1 b_2}$entonces para algún $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x = a + n(b_1 b_2) =$$

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos, existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $F_{a,b_1} \subseteq G_1$ y $F_{a,b_2} \subseteq G_2$.

Afirmamos que $F_{a,b_1 b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Si $x \in F_{a,b_1 b_2}$entonces para algún $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x = a + n(b_1 b_2) = a + (nb_2)b_1 =$$

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos, existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $F_{a,b_1} \subseteq G_1$ y $F_{a,b_2} \subseteq G_2$.

Afirmamos que $F_{a,b_1 b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Si $x \in F_{a,b_1 b_2}$entonces para algún $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x = a + n(b_1 b_2) = a + (nb_2)b_1 = a + (nb_1)b_2,$$

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos, existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $F_{a,b_1} \subseteq G_1$ y $F_{a,b_2} \subseteq G_2$.

Afirmamos que $F_{a,b_1 b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Si $x \in F_{a,b_1 b_2}$entonces para algún $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x = a + n(b_1 b_2) = a + (nb_2)b_1 = a + (nb_1)b_2,$$

luego

$$x \in F_{a,b_1} \subseteq G_1 \text{ y } x \in F_{a,b_2} \subseteq G_2.$$

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos, existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $F_{a,b_1} \subseteq G_1$ y $F_{a,b_2} \subseteq G_2$.

Afirmamos que $F_{a,b_1 b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Si $x \in F_{a,b_1 b_2}$entonces para algún $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x = a + n(b_1 b_2) = a + (nb_2)b_1 = a + (nb_1)b_2,$$

luego

$$x \in F_{a,b_1} \subseteq G_1 \text{ y } x \in F_{a,b_2} \subseteq G_2.$$

Se sigue que $x \in (G_1 \cap G_2)$. Por lo tanto, $F_{a,b_1 b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Con todo se tiene que $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

- Ahora, sean $G_1, G_2 \in \tau$, debemos justificar que: $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Sea $a \in (G_1 \cap G_2)$. Como G_1 y G_2 son abiertos, existen enteros positivos b_1 y b_2 tales que $F_{a,b_1} \subseteq G_1$ y $F_{a,b_2} \subseteq G_2$.

Afirmamos que $F_{a,b_1b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Si $x \in F_{a,b_1b_2}$entonces para algún $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$x = a + n(b_1b_2) = a + (nb_2)b_1 = a + (nb_1)b_2,$$

luego

$$x \in F_{a,b_1} \subseteq G_1 \text{ y } x \in F_{a,b_2} \subseteq G_2.$$

Se sigue que $x \in (G_1 \cap G_2)$. Por lo tanto, $F_{a,b_1b_2} \subseteq (G_1 \cap G_2)$.

Con todo se tiene que $G_1 \cap G_2 \in \tau$. $\overset{\dagger}{\blacksquare}$

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Demostración:

Note cada conjunto de la forma $F_{a,b}$ es no vacío, ya que $a \in F_{a,b}$.

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Demostración:

Note cada conjunto de la forma $F_{a,b}$ es no vacío, ya que $a \in F_{a,b}$.

Sea $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Demostración:

Note cada conjunto de la forma $F_{a,b}$ es no vacío, ya que $a \in F_{a,b}$.

Sea $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Veamos que $F_{x,b} \subseteq F_{a,b}$.

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Demostración:

Note cada conjunto de la forma $F_{a,b}$ es no vacío, ya que $a \in F_{a,b}$.
Sea $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Veamos que $F_{x,b} \subseteq F_{a,b}$.
Si $y \in F_{x,b}$ se tiene que para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$y = x + mb =$$

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Demostración:

Note cada conjunto de la forma $F_{a,b}$ es no vacío, ya que $a \in F_{a,b}$.
Sea $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Veamos que $F_{x,b} \subseteq F_{a,b}$.
Si $y \in F_{x,b}$ se tiene que para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$y = x + mb = (a + nb) + mb =$$

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Demostración:

Note cada conjunto de la forma $F_{a,b}$ es no vacío, ya que $a \in F_{a,b}$.
Sea $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Veamos que $F_{x,b} \subseteq F_{a,b}$.
Si $y \in F_{x,b}$ se tiene que para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$y = x + mb = (a + nb) + mb = a + (n + m)b$$

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Demostración:

Note cada conjunto de la forma $F_{a,b}$ es no vacío, ya que $a \in F_{a,b}$.
Sea $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Veamos que $F_{x,b} \subseteq F_{a,b}$.
Si $y \in F_{x,b}$ se tiene que para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$y = x + mb = (a + nb) + mb = a + (n + m)b$$

lo cual implica que $y \in F_{a,b}$.

Lema 1.

Los conjuntos $F_{a,b}$ son abiertos y cerrados a la vez.

Demostración:

Note cada conjunto de la forma $F_{a,b}$ es no vacío, ya que $a \in F_{a,b}$.
Sea $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Veamos que $F_{x,b} \subseteq F_{a,b}$.
Si $y \in F_{x,b}$ se tiene que para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$y = x + mb = (a + nb) + mb = a + (n + m)b$$

lo cual implica que $y \in F_{a,b}$.
Se concluye que $F_{a,b}$ es un conjunto abierto.

Ahora queremos mostrar que $F_{a,b}$ es cerrado, para esto demostraremos que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Ahora queremos mostrar que $F_{a,b}$ es cerrado, para esto demostraremos que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\subseteq$)

Si $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Ahora queremos mostrar que $F_{a,b}$ es cerrado, para esto demostraremos que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\subseteq$)

Si $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Ahora queremos mostrar que $F_{a,b}$ es cerrado, para esto demostraremos que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\subseteq$)

Si $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Suponga que $x \in \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$

Ahora queremos mostrar que $F_{a,b}$ es cerrado, para esto demostraremos que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\subseteq$)

Si $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Suponga que $x \in \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ entonces $x \in F_{a+k,b}$ para algún $1 \leq k \leq b-1$,

Ahora queremos mostrar que $F_{a,b}$ es cerrado, para esto demostraremos que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\subseteq$)

Si $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Suponga que $x \in \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ entonces $x \in F_{a+k,b}$ para algún $1 \leq k \leq b-1$, luego $x = a + k + mb$ (para algún $m \in \mathbb{Z}$).

Ahora queremos mostrar que $F_{a,b}$ es cerrado, para esto demostraremos que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\subseteq$)

Si $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Suponga que $x \in \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ entonces $x \in F_{a+k,b}$ para algún $1 \leq k \leq b-1$, luego $x = a + k + mb$ (para algún $m \in \mathbb{Z}$). Así, $a + nb = a + k + mb$,

Ahora queremos mostrar que $F_{a,b}$ es cerrado, para esto demostraremos que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\subseteq$)

Si $x \in F_{a,b}$ entonces $x = a + nb$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Suponga que $x \in \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ entonces $x \in F_{a+k,b}$ para algún $1 \leq k \leq b-1$, luego $x = a + k + mb$ (para algún $m \in \mathbb{Z}$). Así, $a + nb = a + k + mb$, de donde $k = b(n-m)$.

Como $n-m \in \mathbb{Z}$, no ocurre que $n=m$, pues en tal caso $k=0$.

Como $n - m \in \mathbb{Z}$, no ocurre que $n = m$, pues en tal caso $k = 0$.

Si $n > m$ entonces $n - m \geq 1$, luego $b(n-m) \geq b$, *i.e.*, $k \geq b$, lo cual no puede ocurrir.

Como $n-m \in \mathbb{Z}$, no ocurre que $n=m$, pues en tal caso $k=0$.

Si $n>m$ entonces $n-m \geq 1$, luego $b(n-m) \geq b$, *i.e.*, $k \geq b$, lo cual no puede ocurrir.

Ahora, si $m>n$ se sigue que $n-m \leq 0$, de donde $b(n-m)<0$, *i.e.*, $k<0$, lo cual es absurdo.

Como $n-m \in \mathbb{Z}$, no ocurre que $n = m$, pues en tal caso $k = 0$.

Si $n > m$ entonces $n-m \geq 1$, luego $b(n-m) \geq b$, *i.e.*, $k \geq b$, lo cual no puede ocurrir.

Ahora, si $m > n$ se sigue que $n-m \leq 0$, de donde $b(n-m) < 0$, *i.e.*, $k < 0$, lo cual es absurdo.

Concluimos que $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Como $n-m \in \mathbb{Z}$, no ocurre que $n=m$, pues en tal caso $k=0$.

Si $n>m$ entonces $n-m \geq 1$, luego $b(n-m) \geq b$, *i.e.*, $k \geq b$, lo cual no puede ocurrir.

Ahora, si $m>n$ se sigue que $n-m \leq 0$, de donde $b(n-m)<0$, *i.e.*, $k<0$, lo cual es absurdo.

Concluimos que $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\supseteq$)

Sea $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$,

Como $n-m \in \mathbb{Z}$, no ocurre que $n=m$, pues en tal caso $k=0$.

Si $n>m$ entonces $n-m \geq 1$, luego $b(n-m) \geq b$, *i.e.*, $k \geq b$, lo cual no puede ocurrir.

Ahora, si $m>n$ se sigue que $n-m \leq 0$, de donde $b(n-m)<0$, *i.e.*, $k<0$, lo cual es absurdo.

Concluimos que $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\supseteq$)

Sea $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$, *i.e.*, $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$,

Como $n-m \in \mathbb{Z}$, no ocurre que $n = m$, pues en tal caso $k = 0$.

Si $n > m$ entonces $n-m \geq 1$, luego $b(n-m) \geq b$, *i.e.*, $k \geq b$, lo cual no puede ocurrir.

Ahora, si $m > n$ se sigue que $n-m \leq 0$, de donde $b(n-m) < 0$, *i.e.*, $k < 0$, lo cual es absurdo.

Concluimos que $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\supseteq$)

Sea $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$, *i.e.*, $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$, *i.e.*, para cada $1 \leq i \leq b-1$, $x \notin F_{a+i,b}$,

Como $n-m \in \mathbb{Z}$, no ocurre que $n = m$, pues en tal caso $k = 0$.

Si $n > m$ entonces $n - m \geq 1$, luego $b(n-m) \geq b$, *i.e.*, $k \geq b$, lo cual no puede ocurrir.

Ahora, si $m > n$ se sigue que $n - m \leq 0$, de donde $b(n-m) < 0$, *i.e.*, $k < 0$, lo cual es absurdo.

Concluimos que $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

$\supseteq$)

Sea $x \in \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$, *i.e.*, $x \notin \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$, *i.e.*, para cada $1 \leq i \leq b-1$, $x \notin F_{a+i,b}$, *i.e.*, para cada $1 \leq i \leq b-1$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $x \neq a + i + nb$.

Dado $n \in \mathbb{Z}$, notemos que:

$$a+1+nb \leq a+i+nb \leq a+(b-1)+nb = a-1+(n+1)b.$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, notemos que:

$$a+1+nb \leq a+i+nb \leq a+(b-1)+nb = a-1+(n+1)b.$$

Como

$$a+nb < a+1+nb \ \text{ y } \ a-1+(n+1)b < a+(n+1)b.$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, notemos que:

$$a+1+nb \leq a+i+nb \leq a+(b-1)+nb = a-1+(n+1)b.$$

Como

$$a+nb < a+1+nb \ \text{ y } \ a-1+(n+1)b < a+(n+1)b.$$

Se sigue que $a+nb < a+i+nb < a+(n+1)b$.

Dado $n \in \mathbb{Z}$, notemos que:

$$a+1+nb \leq a+i+nb \leq a+(b-1)+nb = a-1+(n+1)b.$$

Como

$$a+nb < a+1+nb \ \text{ y } \ a-1+(n+1)b < a+(n+1)b.$$

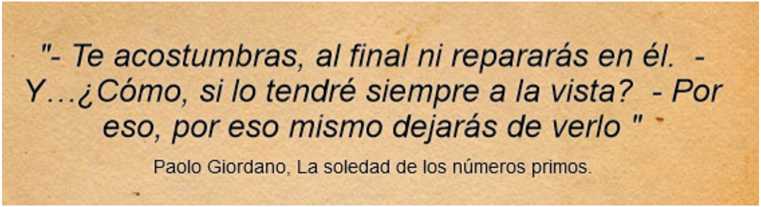
Se sigue que $a+nb < a+i+nb < a+(n+1)b$.
Así, $x = a+nb$ ó $x = a+(n+1)b$, en cualquiera casos se tiene que $x \in F_{a,b}$.

Con todo hemos probado que $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$.

Luego, como cada $F_{a+i,b}$ es abierto, tenemos que $\bigcup\limits_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ es abierto y por lo tanto $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ es cerrado.

Luego, como cada $F_{a+i,b}$ es abierto, tenemos que $\bigcup\limits_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ es abierto y por lo tanto $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ es cerrado. $\overset{\dagger}{\blacksquare}$

Luego, como cada $F_{a+i,b}$ es abierto, tenemos que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ es abierto y por lo tanto $F_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}$ es cerrado.[†] $\blacksquare$



Lema 2.

Cualquier conjunto abierto no vacío en $(\mathbb{Z}, \tau)$ *es infinito.*

Lema 2.

Cualquier conjunto abierto no vacío en $(\mathbb{Z}, \tau)$ es infinito.

Demostración:

Recordemos que un conjunto $G \neq \emptyset$ es abierto si para cada $a \in G$ existe $b > 0$ tal que $F_{a,b} \subseteq G$.

Dado que $F_{a,b}$ es infinito, se tiene que G es infinito.

Lema 2.

Cualquier conjunto abierto no vacío en $(\mathbb{Z}, \tau)$ es infinito.

Demostración:

Recordemos que un conjunto $G \neq \emptyset$ es abierto si para cada $a \in G$ existe $b > 0$ tal que $F_{a,b} \subseteq G$.

Dado que $F_{a,b}$ es infinito, se tiene que G es infinito. $\overset{\dagger}{\blacksquare}$

Lema 2.

Cualquier conjunto abierto no vacío en $(\mathbb{Z}, \tau)$ es infinito.

Demostración:

Recordemos que un conjunto $G \neq \emptyset$ es abierto si para cada $a \in G$ existe $b > 0$ tal que $F_{a,b} \subseteq G$.

Dado que $F_{a,b}$ es infinito, se tiene que G es infinito. † $\blacksquare$

> "Sobre sus cabezas flotaba una gran burbuja
> llena de cosas que tendrían que decirse,
> y los dos miraban al suelo para no verla"
>
> *La Soledad de los Números Primos* (Paolo Giordano)

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

$[\subseteq]$ Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$,

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

[$\subseteq$] Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$.

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

[$\subseteq$] Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$.

[$\supseteq$] Sea $z \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

[$\subseteq$] Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$.

[$\supseteq$] Sea $z \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$entonces $z \in F_{0,q}$, para algún $q \in \mathbb{P}$,

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

$[\subseteq]$ Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$.

$[\supseteq]$ Sea $z \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$entonces $z \in F_{0,q}$, para algún $q \in \mathbb{P}$, *i.e*, $z = mq$, para algún $m \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

$[\subseteq]$ Sea $z \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$.

$[\supseteq]$ Sea $z \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$entonces $z \in F_{0,q}$, para algún $q \in \mathbb{P}$, *i.e*, $z = mq$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego, si $z = 1$ entonces $m = 1 = q$ ó $m = -1 = q$,

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

$[\subseteq]$ Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$.

$[\supseteq]$ Sea $z \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$entonces $z \in F_{0,q}$, para algún $q \in \mathbb{P}$, *i.e*, $z = mq$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego, si $z = 1$ entonces $m = 1 = q$ ó $m = -1 = q$, lo cual no es posible pues $q \in \mathbb{P}$, de modo que $z \neq 1$.

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

[$\subseteq$] Sea $z\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z\in F_{0,q}$ y así $z\in \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$.

[$\supseteq$] Sea $z \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$entonces $z\in F_{0,q}$, para algún $q\in\mathbb{P}$, *i.e*, $z = mq$, para algún $m\in\mathbb{Z}$. Luego, si $z = 1$ entonces $m = 1 = q$ ó $m = -1 = q$, lo cual no es posible pues $q\in\mathbb{P}$, de modo que $z \neq 1$. Análogamente vemos que $z \neq -1$.

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

$[\subseteq]$ Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$.

$[\supseteq]$ Sea $z \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$entonces $z \in F_{0,q}$, para algún $q \in \mathbb{P}$, *i.e*, $z = mq$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego, si $z = 1$ entonces $m = 1 = q$ ó $m = -1 = q$, lo cual no es posible pues $q \in \mathbb{P}$, de modo que $z \neq 1$. Análogamente vemos que $z \neq -1$. Así que $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

$[\subseteq]$ Sea $z \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$.

$[\supseteq]$ Sea $z \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$entonces $z \in F_{0,q}$, para algún $q \in \mathbb{P}$, *i.e*, $z = mq$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego, si $z = 1$ entonces $m = 1 = q$ ó $m = -1 = q$, lo cual no es posible pues $q \in \mathbb{P}$, de modo que $z \neq 1$. Análogamente vemos que $z \neq -1$. Así que $z \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$.

Con todo $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} F_{0,p}$.

Lema 3.

Se cumple que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$

Demostración:

$[\subseteq]$ Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$,luego z tiene un divisor primo q , *i.e.*, $z = nq$, para algún entero n, esto implica que $z \in F_{0,q}$ y así $z \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$.

$[\supseteq]$ Sea $z \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$entonces $z \in F_{0,q}$, para algún $q \in \mathbb{P}$, *i.e*, $z = mq$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego, si $z = 1$ entonces $m = 1 = q$ ó $m = -1 = q$, lo cual no es posible pues $q \in \mathbb{P}$, de modo que $z \neq 1$. Análogamente vemos que $z \neq -1$. Así que $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

Con todo $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} F_{0,p}$. $\overset{\dagger}{\blacksquare}$

Teorema.

El conjunto $\mathbb{P}$, de los números primos, es infinito.

Teorema.

El conjunto $\mathbb{P}$, de los números primos, es infinito.

Demostración:

Si $\mathbb{P}$ fuese finito,

Teorema.

El conjunto $\mathbb{P}$, de los números primos, es infinito.

Demostración:

Si $\mathbb{P}$ fuese finito, por lema 3, el conjunto $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ debe ser cerrado, pues sería la unión finita de los conjuntos cerrados $F_{0,p}$ (lema 1).

Teorema.

El conjunto $\mathbb{P}$, de los números primos, es infinito.

Demostración:

Si $\mathbb{P}$ fuese finito, por lema 3, el conjunto $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ debe ser cerrado, pues sería la unión finita de los conjuntos cerrados $F_{0,p}$ (lema 1). Luego el conjunto $\{-1, 1\}$ debe ser abierto y por tanto infinito (lema 2),

Teorema.

El conjunto $\mathbb{P}$, de los números primos, es infinito.

Demostración:

Si $\mathbb{P}$ fuese finito, por lema 3, el conjunto $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ debe ser cerrado, pues sería la unión finita de los conjuntos cerrados $F_{0,p}$ (lema 1). Luego el conjunto $\{-1, 1\}$ debe ser abierto y por tanto infinito (lema 2), lo cual claramente es absurdo, pues sólo tiene dos elementos.

Teorema.

El conjunto $\mathbb{P}$, de los números primos, es infinito.

Demostración:

Si $\mathbb{P}$ fuese finito, por lema 3, el conjunto $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ debe ser cerrado, pues sería la unión finita de los conjuntos cerrados $F_{0,p}$ (lema 1). Luego el conjunto $\{-1, 1\}$ debe ser abierto y por tanto infinito (lema 2), lo cual claramente es absurdo, pues sólo tiene dos elementos.

Por tanto $\mathbb{P}$ es infinito.

Teorema.

El conjunto $\mathbb{P}$, de los números primos, es infinito.

Demostración:

Si $\mathbb{P}$ fuese finito, por lema 3, el conjunto $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ debe ser cerrado, pues sería la unión finita de los conjuntos cerrados $F_{0,p}$ (lema 1). Luego el conjunto $\{-1, 1\}$ debe ser abierto y por tanto infinito (lema 2), lo cual claramente es absurdo, pues sólo tiene dos elementos.

Por tanto $\mathbb{P}$ es infinito. $\blacksquare^{\dagger}$

Casi nunca miraba a los alumnos. Sentía como si aquellos ojos claros que ellos clavaban en la pizarra y en su persona pudiesen desnudarle el alma. Se limitaba a escribir sus fórmulas y ecuaciones y a explicarlas como si se las explicara a sí mismo. En aquella aula enorme, desproporcionada, la docena de estudiantes de cuarto curso que asistían a sus clases de topología algebraica se sentaban en las tres primeras filas, más o menos en los mismos sitios siempre, dejando uno vacío en medio, como él mismo hacía cuando iba a la universidad, aunque en ninguno de aquellos alumnos se reconocía en absoluto.

La soledad de los números primos - Paolo Giordano.

“Más veces descubrimos nuestra sabiduría con nuestros disparates que con nuestra ilustración.”

Oscar Wilde


"That's all Folks!"