Introducción a Sistemas Anidados en Análisis de Portafolios de Inversión.

Mat. Elda Janeth López

Agenda de la Presentación

- Definición del Problema
- Métodos Tradicionales.
- Modelo Propuesto.
- Análisis de Caso.
- Conclusiones.
- Próximas Líneas de Investigación.

Definición del Problema

Suponga dos instrumentos de inversión, el primero consiste en un activo libre de riesgo con tasa de interés fija a través del tiempo y el segundo un activo de especulación.

Considere además, un inversionista que dispone de $ 100.00 USD y que se caraceriza por ser racional en su toma de decisiones, cuyo objetivo primario es controlar la probabilidad de pérdida (riesgo) al invertir de manera combinada en los dos instrumentos.

Es decir, estamos interesados en determinar la cantidad a invertir en cada uno de los activos.

Métodos tradicionales

▷ Markowitz

Establece las siguientes funciones:

- $E[Rend.Cart.] = \sum_{i=1}^{n} c_i * E[Rend.Activo_i]$
- $Var[Rend.Cart.] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 * Var[Rend.Activo_i] - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} c_i c_j Cov(Rend.Act_i, Rend.Act_j]$
- $\sum_{i=1}^{n} c_i = 100.$

  El objetivo es maximizar el valor esperado dado una varianza total ó minimizar la varianza dado un valor esperado total.

Métodos Tradicionales

▷ Desventajas

- Supone que la varianza es constante a través del tiempo.
- No considera función de distribución alguna para el rendimiento.

No conveniente aplicar en periodos largos de tiempo.

Métodos Tradicionales

▷ Modelo Basado en el Valor en Riesgo.

Supone la siguente fórmula:

$$S_i(t + \partial t) = S_i(t)e^{(\mu_i - \sigma^2/2)\partial t + \sigma\eta\sqrt{\partial t}}$$

donde:

$S_i(t)$: Precio del activo al momento t.

η: Variable aleatoria de distribución normal estándar.

Métodos Tradicionales

- Desventajas:

  - No robusta a la presencia de sesgo (los activos de riesgo, generalmente presentan sesgo negativo).

  - Poco susceptible a la presencia de Kurtosis (los activos de riesgos tienden a tener frecuentes outliers, porlo que subestima el parámetro).

Modelo Propuesto

Introzcamos el proceso estocástico $\{Y_T\}_{T=t}$, que representa la volatilidad observada al momento T, mismo que es de naturaleza aleatoria.

Donde $0 \leq Y_T < \infty$.

Modelo Propuesto

No obstante el proceso $\{Y_T\}_{T=t}$ no es observable de manera directa, por lo cual es estimado a través de la desviación estándar al momento T a través del sisguiente sistema de ecuaciones:

$$Y_T = \sigma_T + \epsilon_T$$

Además,

$$\sigma_T = \sigma_{T-1} + \nu_T$$

Modelo Propuesto

Donde:

- $Cov(\nu_T, \epsilon_T) = 0$
- $Cov(\epsilon_T, \epsilon_{T-j}) = 0$, $j \neq 0$
- $Cov(\nu_T, \nu_{T-j}) = 0$, $j \neq 0$
- $var(\nu_T) = \sigma_\nu^2$
- $var(\epsilon_T) = \sigma_\epsilon^2$
- ν_T y ϵ_T tienen distribución estable simétrica conocida.

Modelo Propuesto

Considere la rentabilidad del activo através del tiempo, mismo que está contenido en el proceso estocástico $\{r_t\}$, que representa la rentabilidad obtenida al momento t con respecto al periodo $t-1$.

De igual manera, introduzcamos ahora el proceso estocástico $\{\sigma_T\}_{T=t}$, mismo que supondremos es clusterizable (agrupable) en $n < \infty$ clusters homogéneos.

Modelo Propuesto

Introduzcamos el proceso $Z(T)$, mismo que indica el cluster (estado) en el cual se encuentra la volatilidad en el momento T, mismos que estará representado por las variables aleatorias Z con espacio de estados $\{1, 2, ...n\}$ y $T > 0$.

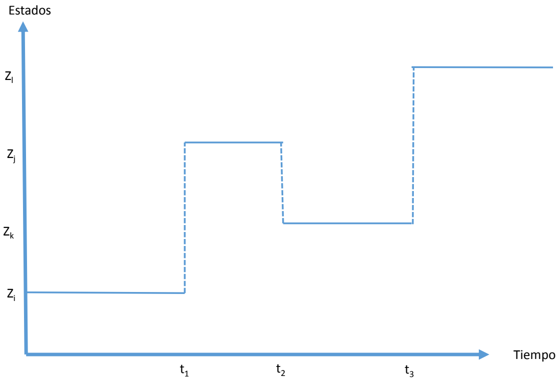
Es decir, tenemos un sistema de dos variables aleatorias que corren en paralelo e independientemente, mismo que se le conoce como Proceso Semi-Markoviano.

Modelo Propuesto

Donde la variable aleatoria Z está gobernada por una matriz de transición; mientras que T por una función de supervivencia (función de densidad), ambas estimables.

Modelo Propuesto

El proceso Z(T), se le conoce como "Semi-Markovian Jumping Process" y gráficamente puede ser representado de la siguiente manera



Modelo Propuesto

El Modelo se basa en que la rentabilidad es homogenéa en cada uno de los n estados; es decir, a cada grupo le corresponde una función de densidad asociada a la rentabilidad.

Es decir, la probabilidad de ocurrencia de un intervalo de rentabilidad dada, está en función de la desviación estándar (volatilidad) observada en la fecha deseada.

$$Prob[a \leq r(t) \leq b | Z(t) = i] = \int_a^b f_i(r)dr.$$

donde f_i representa la función de densidad asociada al estado i.

Modelo Propuesto

De esta forma, el Sistema se desarrolla de manera aleatoria a través de la realización de dos variables aleatorias anidadas:

- $Z(T) \triangleright$ Modela la volatilidad.
- $R(T) \triangleright$ Modela la rentabilidad.

Es decir, el modelo va creciendo en forma de un árbol de decisión aleatorio, donde la mayoría de las probabiidades son expresadas en ecuaciones diferenciales (sin solución cerrada); por lo que una alternativa de solución es a través de simulación Montecarlo.

Modelo Propuesto

Introduzcamos ahora el proceso estocástico $\{M_T\}_{T=t}$, que representa el valor de mi capital al momento T, donde $0 \leq M_T < \infty$, mismo que se le conoce como proceso de recompensa.

En el caso de nuestro problema, $M_{inicial} = 100$.

Además:

$\hat{M}_T = 100 \prod_{i=0}^{t} (1 + r(t))$

Caso de Estudio

Considere un inversionista con capital inicial de \$100.00 USD, mismo que tiene la posiblidad de invertir en los siguientes activos:

- Bonos del tesoro a 30 años, con una tasa de interés fija de 2.67 por ciento instantánea anual.
- Acciones de Wall-Mart Inc.

Caso de Estudio

La inversión será a un mes (21 días hábiles) y si consideramos C_1 monto invertido en el bono y C_2 monto invertido en la acción de Walmart, entonces:

- $C_1 + C_2 = 100$.
- $Rent.Total = C_1(Rentabilidad_{bono}) + C_2(Rentabilidad_{Wall-Mart})$.

Suponga además, que el inversionista es racional en su toma de decisiones y que su objetivo primario es minimizar la probabilidad de pérdida.

Caso de Estudio

El análisis descriptivo de la rentabilidad arrojó los siguientes parámetros.

Parámetro	Valor
Media	0.04%
Mediana	0.00%
Desv. Est.	2.27%
Sesgo	-8.39
Kurtosis	182.85
Mínimo	-50.25%
Máximo	12.44%
Rango	62.69%

Caso de Estudio

- Suponga que el inversionista invierte la totalidad de su monto inicial en Wall-Mart, de la cual tenemos la serie histórica de la rentabilidad de enero de 1980 a octubre del 2016.

- Para identificar los pasos de retraso en la desviación estándar se consideró un modelo AR(2), de la cual se obtuvo la duración de los ciclos, mismo que fue una cifra cercana a 5.

- Se detectaron 9 clusters (estados) para la volatilidad, donde el I representa la menor volatilidad y el *IX* la mayor volatilidad (análisis estadístico de datos).

Caso de Estudio

El análisis descriptivo de la rentabilidad por tipo de volatilidad arrojó los siguientes parámetros.

Estadístico	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	IX*
Media	0.02%	0.01%	0.03%	0.11%	-0.02%	0.09%	0.10%	0.19%	-0.27%	0.40%
Mediana	0.018%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.327%	0.424%
Desv. Est.	0.61%	0.84%	1.07%	1.26%	1.52%	1.73%	2.12%	2.66%	6.91%	3.92%
Sesgo	-0.11	0.10	0.07	0.00	0.07	0.08	0.01	-0.05	-4.62	0.02
Kurtosis	0.59	0.04	-0.35	-0.35	-0.40	-0.47	-0.51	-0.62	30.64	0.10
Mínimo	-2.46%	-2.76%	-3.09%	-4.29%	-3.89%	-4.75%	-6.02%	-6.72%	-50.25%	-11.79%
Máximo	2.72%	3.19%	3.28%	4.22%	4.67%	4.87%	5.69%	6.75%	12.44%	12.44%
Rango	5.18%	5.95%	6.38%	8.51%	8.57%	9.62%	11.71%	13.47%	62.69%	24.23%

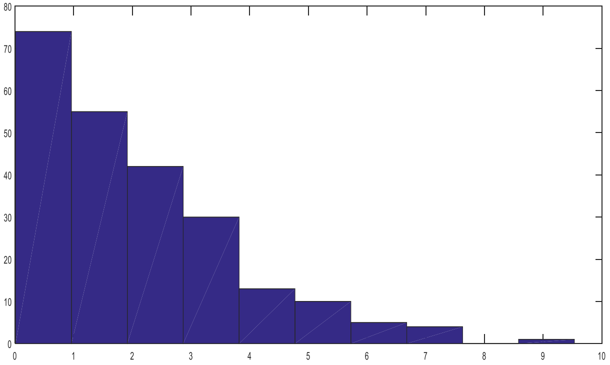
* Ajustado

Caso de Estudio

- Para la función de densidad de la volatilidad, se supuso 9 distribuciones Weibull.
- Para la función de distribución de la rentabilidad, se supuso 9 distribuciones normales (dado sesgo y kurtosis moderadas).
- Se supuso el estado 1 como el estado inicial del proceso.
- Se corrieron 500 simulaciones Montecarlo para estimar la probabilidad de pérdida con un 99 por ciento de confianza.

Caso de Estudio

Función de Pérdida



Caso de Estudio

- Probilidad inicial de pérdida $= 0.47$
- Pérdida al 99 por ciento de confianza $=$ \$ 7.01
- Cantidad a invertir en el activo 1 $=$\$ 6.99
- Cantidad a invertir en el activo 2 $=$ \$ 93.01
- Probabilidad final de pérdida en activo 2$=$ 0.47 %

  Nota: Generalmente se adquiere una estrategia de cobertura hasta por \$ 7.01 con una prima neta de (0.47*7.01*0.99= 3.26 por cada 100 invertidos en walmart).

Conclusiones

- Los datos empíricos arrojan una estrecha correlación entre la rentabilidad y la volatilidad de la serie.
- El sistema mejora notablemente los resultados de los modelos anteriores, dado la relajación de supuestos que no son verdaderos en la realidad.
- Modelo totalmente aplicable a casos reales.

Próximas Líneas de Investigación

- Generalizar la función de rentabilidad a una función de distribución estable simétrica.
- Generalizar el modelo a $m > 1$ activos de especulación.